Proyecto MaTEX

Optimización

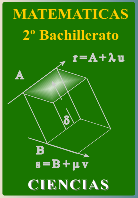
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTEX

OPTIMIZACIÓN

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. Introducción

Una de las aplicaciones más usuales del cálculo, en otros campos de las matemáticas, consiste en el cálculo de valores máximos y mínimos.

Considérese con qué frecuencia oímos o leemos frases como el mayor beneficio, el menor coste, el producto más barato, el tamaño óptimo, el menor área, la menor distancia.

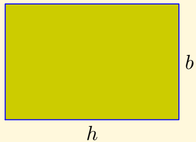
Este tipo de preguntas se realizan constantemente en el campo de la economía, del transporte, de la ingeniería, medicina, etc.

En el campo de las matemáticas estos problemas ocupan un lugar importante y requieren el esfuerzo de especialistas que trabajan en resolverlos dentro la rama conocida en general como Técnicas de Optimización.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 1.1. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. ¿Cuáles han de ser las dimensiones del rectángulo para obtener un área máxima?

Solución: Realizamos un dibujo y planteamos las incógnitas. Siendo b el lado del rectángulo y h la altura del rectángulo,



la función objetivo es el área que viene dado por $A = b\,h$, la restricción es el perímetro $p = 100$ del rectángulo

$$p = 2\,b + 2\,h = 100$$

Despejamos h,

$$h = \frac{100 - 2\,b}{2} = 50 - b$$

y sustituimos en A

$$A = b\,(50 - b)$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$A' = 50 - 2b = 0 \Longrightarrow b = 25$$

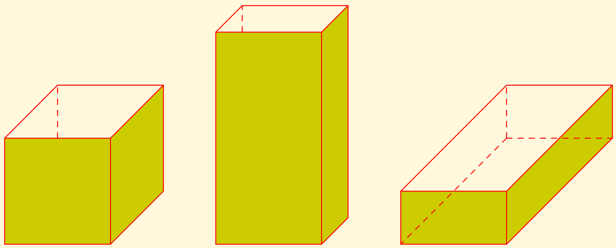
quedando las dimensiones del rectángulo $\boxed{b=25}$ $\boxed{h=25}$ $\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 1.2. A partir de 12 cm^2 de material queremos construir una caja abierta con un ancho fijo de 2 cm. ¿Cuáles han de ser el largo x y el alto h de la caja para obtener un volumen máximo?

Solución: Siendo x el largo de la base y h la altura de la caja, la la función objetivo es el volumen viene dado por

$$V = 2\,x\,h$$



La restricción es la superficie de todas las caras excepto la superior, y tiene que ser $S = 12$. De la figura se tiene

$$S = 2\,x + 4\,h + 2\,x\,h = 12$$

Despejando, expresamos h en función de x:

$$h = \frac{6 - x}{2 + x}$$

y sustituimos en V

$$V = 2\,x\,\frac{6-x}{2+x} = \frac{12\,x - 2\,x^2}{2+x}$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$\begin{aligned} V' &= \frac{(12-4\,x)\,(2+x) - (12\,x - 2\,x^2)}{(2+x)^2} \\ &= \frac{-2\,x^2 - 8\,x + 24}{(2+x)^2} \end{aligned}$$

Igualamos $V' = 0$,

$$V' = 0 \Longrightarrow, x^2 + 4\,x - 12 = 0 \Longrightarrow \boxed{x=2}\, x = -6$$

Comprobamos que en $x = 2$ hay un máximo

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
V'		$-$	0	$+$	0	$-$	
V		$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

quedando las dimensiones de la caja óptima

$$\boxed{\text{x=2}} \qquad \boxed{\text{h=1}}$$

y el volumen máximo $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ cm^3. $\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2. Esquema general

Para la mayoría de los ejercicios de optimización damos un esquema general que ayuda a resolver los problemas.

1. Asignar símbolos a todas las cantidades y si es posible representar gráficamente el problema

2. Escribir la función objetivo que hay que minimizar-maximizar, que en general tendrá más de una variable.

3. Escribir la restricción del problema que relacionan las variables.

4. Obtener a partir de la restricción la función objetivo con una sola variable.

5. Calcular el máximo o mínimo buscado mediante derivación.

Ejemplo 2.1. ¿Qué número positivo x minimiza la suma de x y su recíproco?

Solución: La función objetivo es la suma dada por

$$S(x) = x + \frac{1}{x}$$

solo hay una variable con la restricción $x > 0$

Para encontrar el valor mínimo, derivamos

$$S'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

como $x > 0$

$$\boxed{x = 1} \qquad \boxed{S(1) = 2}$$

Se puede comprobar que es un mínimo con la segunda derivada

$$S''(x) = \frac{2}{x^3} \Longrightarrow S''(1) = 2 > 0$$

luego $x = 1$ es un mínimo. □

Ejercicio 1. Hallar las dimensiones del triángulo rectángulo de mayor área que se puede construir, si la suma de las longitudes de uno de los catetos y la hipotenusa es 10 m.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 2.2. La suma de un número con el doble de otro es 24. ¿Qué números se elegirán para que su producto sea máximo?

Solución: La función objetivo es el producto dado por

$$P(x, y) = x \cdot y$$

hay dos variables con la restricción

$$x + 2y = 24$$

Como tenemos que hacer máximo el producto, es conveniente expresar P en una sola variable. Despejamos x de la restricción, $x = 24 - 2y$ y sustituimos en P

$$P(y) = (24 - 2y)\, y$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$P'(y) = 24 - 4y = 0 \Longrightarrow y = 6$$

quedando los números buscados

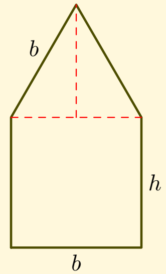
$$\boxed{x = 12} \qquad \boxed{y = 6} \qquad \boxed{P = 72}$$

□

3. Ejercicios

Ejercicio 2.

A una ventana rectangular se le abre un triángulo equilátero sobre el lado superior. Si el perímetro total de la figura así formada es de 11 m, determinar las dimensiones para que el área sea máxima.



Ejercicio 3. Hallar las coordenadas del punto de la curva $y = \sqrt{x}$ más cercano al punto $P(4,0)$.

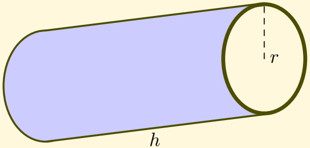
Ejercicio 4. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y cuya suma sea mínima

Ejercicio 5. Un trapecio isósceles tiene una base menor de 14 cm y lados oblicuos de 6 cm. ¿Cuál es el área máxima de este trapecio?.

Ejercicio 6. En una oficina de correos sólo se admiten paquetes en forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y además, la suma de ancho, alto y largo sea de 72 cm. Hallar las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

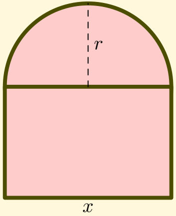
Ejercicio 7.

Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Hallar las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.



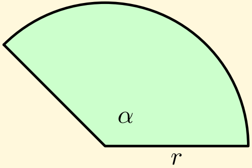
Ejercicio 8.

Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10 metros



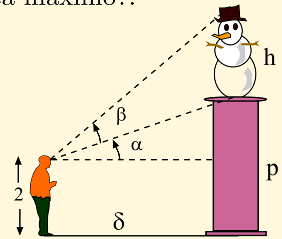
Ejercicio 9.

Un jardinero desea construir un parterre de forma de sector circular. Si dispone de 10 m. de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que tenga la mayor superficie posible?.



Ejercicio 10. A un cilindro se le adosan dos semiesferas. Hallar la altura del cilindro y el radio de la esfera para que el volumen sea de 1 dm^3 y la superficie del recipiente sea mínima.

Ejercicio 11. Sea una figura de altura **h** m. sobre un pedestal de **p** m. ¿A qué distancia δ del pedestal nos debemos situar para que el ángulo β bajo el que se ve la estatua sea máximo?.



Ejercicio 12. A 10 km de tu casa te acuerdas que te has dejado el agua corriendo, lo que te cuesta 10 $pts.$ a la hora. Volver a casa a una velocidad constante de $x\, km/h$ te cuesta en combustible, $9 + x/10\ pts/km$ Se pide:

1. ¿Cuánto te cuesta volver a casa a $x\, km/h$ (en combustible)?
2. ¿Qué tiempo tardas en llegar a casa si viajas a esa velocidad ?
3. ¿Cuánto te cuesta el consumo de agua mientras regresas a casa?
4. ¿A qué velocidad debes regresar a casa para que el coste total del consumo de agua y combustible sea mínimo?

Ejercicio 13. Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

1. La producción actual de la huerta.
2. La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.
3. La producción que se obtendría en total de la huerta si se plantan x árboles más.
4. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?. Interpretar el resultado.

Ejercicio 14. Un cosechero calcula que si la recogida de la fruta se realiza hoy, obtendría una cosecha de 120 hectólitros de fruta que podría vender a 2.500 pts. cada hectólitro. Calcula también que si espera t semanas, la cosecha aumentará a razón de 20 hectólitros cada semana, aunque a cambio el precio del hectólitro disminuirá en 250 pts. cada semana. ¿Cuándo debe recolectar para obtener la máxima ganancia, y cuál es esa ganancia máxima?

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Llamamos a los catetos x e y respectivamente. El área viene dado por

$$A = \frac{1}{2} x\, y$$

La restricción viene dada por

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = 10$$

Despejamos $y = \sqrt{100 - 20x}$, y sustituimos en A

$$A = \frac{1}{2} x \sqrt{100 - 20x} = x \sqrt{25 - 5x}$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$A' = \sqrt{25 - 5x} - \frac{5x}{2\sqrt{100 - 20x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{10}{3}$$

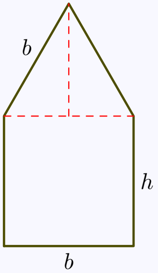
quedando las dimensiones del triángulo rectángulo

$$\boxed{x = \frac{10}{3}} \qquad \boxed{y = \frac{10}{\sqrt{3}}}$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2. Llamamos a la base y la altura del rectángulo, b y h respectivamente. El área viene dado por

$$A = b\,h + \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$



La restricción viene dada por

$$p = 3b + 2h = 11$$

Despejamos $h = \dfrac{11 - 3b}{2}$, y sustituimos en A

$$A = b\,\frac{11 - 3b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$A' = \frac{11}{2} - 3b + \frac{\sqrt{3}}{2} b = 0 \Longrightarrow b = \frac{11}{6 - \sqrt{3}}$$

quedando las dimensiones del triángulo rectángulo

$$\boxed{b = \frac{11}{6 - \sqrt{3}}} \qquad \boxed{h = \frac{7 - \sqrt{3}}{2}}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3. Sea $X(x,y)$ un punto de la curva $y=\sqrt{x}$, la función objetivo es la distancia de X a P

$$d = d(X,P) = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}$$

hay dos variables con la restricción

$$y=\sqrt{x}$$

Como tenemos que hacer mínima la distancia, es conveniente expresar d en una sola variable. De la restricción sustituimos en d

$$d=\sqrt{(x-4)^2+x}$$

Para encontrar el valor mínimo, derivamos

$$d' = \frac{2x-7}{2\sqrt{(x-4)^2+x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{7}{2}$$

quedando el punto buscado

$$\boxed{x=\frac{7}{2}} \qquad \boxed{y=\sqrt{\frac{7}{2}}}$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4. La función objetivo es la suma dada por

$$S(x,y) = x + y$$

hay dos variables con la restricción

$$x \cdot y = 192$$

Como tenemos que hacer mínima la suma, es conveniente expresar S en una sola variable. Despejamos y de la restricción, $y = \dfrac{192}{x}$ y sustituimos en S

$$S(x,y) = x + \frac{192}{x}$$

Para encontrar el valor mínimo, derivamos

$$S' = 1 - \frac{192}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

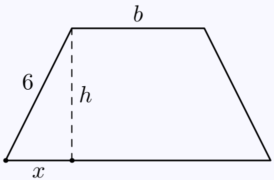
quedando los números buscados

$$\boxed{x = 8\sqrt{3}} \qquad \boxed{y = 8\sqrt{3}}$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5. Siendo la base menor $b = 14$, la base mayor en el dibujo es $B = 14 + 2x$ y la altura del trapecio h respectivamente. El área viene dado por

$$A = \frac{(B+b)}{2}\,h = \frac{(14+2x+14)}{2}\,h$$



La restricción viene dada por

$$h^2 = 36 - x^2 \Longrightarrow h = \sqrt{36 - x^2}$$

y sustituimos en A

$$A = (14 + x)\sqrt{36 - x^2}$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$A' = \frac{-2x^2 - 14x + 36}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Longrightarrow x = -9, \boxed{2}$$

quedando las dimensiones del triángulo rectángulo

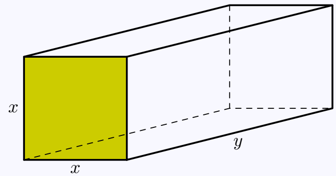
$$\boxed{B = 32} \qquad \boxed{h = \sqrt{32}} \qquad \text{Area } \boxed{27\sqrt{32}}$$

Ejercicio 5

◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6. Con los datos del dibujo, el volumen viene dado por

$$V = x^2\, y$$



La restricción viene dada por

$$2x + y = 72 \Longrightarrow y = 72 - 2x$$

y sustituimos en V

$$V = x^2\,(72 - 2x)$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$V' = 144x - 6x^2 = 0 \Longrightarrow x = \boxed{24}$$

quedando las dimensiones del paralelepípedo

$$\boxed{x = 24} \qquad \boxed{y = 24} \qquad \text{Volumen } \boxed{24^3}$$

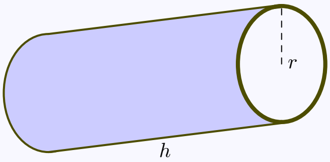
Ejercicio 6

Ejercicio 7. Con los datos del dibujo, la chapa empleada viene dada por

$$S = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h$$

La restricción viene dada por

$$V = \pi\, r^2\, h = 160 \Longrightarrow h = \frac{160}{\pi\, r^2}$$



y sustituimos en S

$$S = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\frac{160}{r}$$

Para encontrar el valor mínimo, derivamos

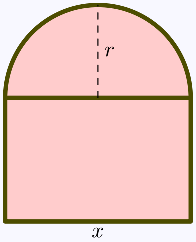
$$S' = 4\,\pi\, r - 2\,\frac{160}{r^2} = 0 \Longrightarrow r = \boxed{\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}}$$

quedando las dimensiones del cilindro

$$r = \boxed{\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}} \qquad h = \boxed{2\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.



Con los datos del dibujo, el área de la ventana viene dada por

$$S = x^2 + \frac{\pi\, r^2}{2}$$

La restricción viene dada por

$$p = \pi\, r + 3\, x = 10 \Longrightarrow x = \frac{10 - \pi\, r}{3}$$

y sustituimos en S

$$S = (\frac{10 - \pi\, r}{3})^2 + \frac{\pi\, r^2}{2}$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$S' = \frac{-20\,\pi + 2\pi^2\, r + 9\pi\, r}{9} = 0 \Longrightarrow r = \boxed{\frac{20}{9 + 2\pi}}$$

quedando las dimensiones de la ventana

$$r = \boxed{\frac{20}{9 + 2\pi}} \qquad x = \boxed{\frac{30}{9 + 2\pi}}$$

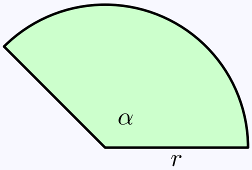
Ejercicio 8

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
OPTIMIZACIÓN
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 9.

Con los datos del dibujo, el área del sector viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\,\pi\,\alpha\,r^2$$



La restricción viene dada por

$$p = \alpha\,r + 2r = 10 \Longrightarrow \alpha = \frac{10-2r}{r}$$

y sustituimos en A

$$A = \frac{1}{2}\,\pi\,\frac{10-2r}{r}\,r^2 = \pi\,(5-r)\,r$$

Para encontrar el valor máximo, derivamos

$$A' = \pi(5-2r) = 0 \Longrightarrow r = \boxed{\frac{5}{2}}$$

quedando las dimensiones del sector circular

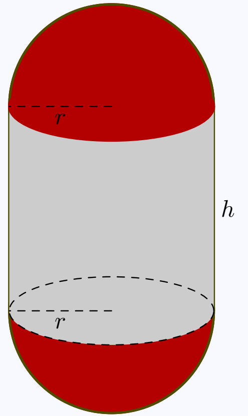
$$r = \boxed{\frac{5}{2}} \qquad \alpha = \boxed{2}$$

Ejercicio 9

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10. Con los datos del dibujo, la superficie del recipiente viene dada por

$$S = 4\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,h$$



La restricción viene dada por el volumen

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 + \pi\,r^2\,h = 1 \Longrightarrow h = \frac{1}{\pi\,r^2} - \frac{4}{3}\,r$$

y sustituimos en S

$$S = \frac{4}{3}\,\pi\,r^2 + \frac{2}{r}$$

Para encontrar el valor mínimo, derivamos

$$S' = \frac{8}{3}\,\pi\,r - \frac{2}{r^2} = 0 \Longrightarrow r = \boxed{\sqrt[3]{\frac{3}{4\,\pi}}}$$

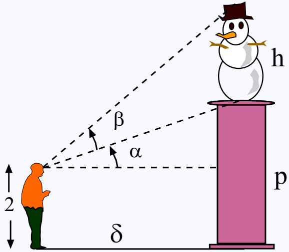
quedando las dimensiones del depósito

$$r = \boxed{\sqrt[3]{\frac{3}{4\,\pi}}} \qquad h = \boxed{0}$$

Ejercicio 10

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
OPTIMIZACIÓN
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 11. Con los datos del dibujo, se tiene



$$\tan\alpha = \frac{p-2}{\delta}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{p-2+h}{\delta} \qquad (1)$$

De la expresión

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

despejamos $\tan\beta$

$$\tan\beta = \frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)}$$

Sustituimos por los valores de (1)

$$\tan\beta = \frac{\dfrac{p-2+h}{\delta} - \dfrac{p-2}{\delta}}{1+\dfrac{p-2}{\delta}\,\dfrac{p-2+h}{\delta}} = \frac{h\,\delta}{\delta^2+(p-2)\,(p-2+h)} \qquad (2)$$

derivando (2) respecto de δ e igualando a cero, se obtiene

$$\delta = \boxed{\sqrt{(p-2)(p-2+h)}}$$

Ejercicio 11

◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

Ejercicio 12.

1. A razón de $9 + x/10 \; pts/km$, en $10 \; km$, el coste en combustible C_{comb}, es
$$C_{comb} = (9 + x/10)\, 10 = 90 + x \; pts$$
2. A una velocidad de $x \, km/h$, en $10 \; km$, el tiempo empleado, es
$$t = \frac{10}{x} \; h.$$
3. A razón de $10 \; pts/h$, en un tiempo de t horas, el coste en agua C_{agua}, es
$$C_{agua} = 10\, t = \frac{100}{x} \; pts$$
4. El coste total $C_T = C_{comb} + C_{agua} = (90 + x) + \dfrac{100}{x}$. Derivando para hallar el mínimo
$$(C_T)' = 1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \boxed{10} \; km/h$$

Ejercicio 12

Ejercicio 13. Sea x el número de árboles añadidos a los 25 que tenemos y $P(x)$ la producción de frutos para esos x árboles.

$$\begin{array}{ll} x=1 & P(x=1)=(25+1)\cdot(600-15\cdot 1) \\ x=2 & P(x=2)=(25+2)\cdot(600-15\cdot 2) \end{array}$$

Para el caso general, la producción es

$$P(x)=(25+x)\cdot(600-15\cdot x)$$

derivando $P(x)$ respecto de x e igualando a cero, se obtiene

$$P'(x)=-30\,x+225=0 \Longrightarrow x=7'5$$

como x tiene que ser un número entero, el máximo se alcanzará en $x=7$ o $x=8$. Siendo

$$P(7)=32\cdot 495=15840=P(8)=33\cdot 480$$

el número de árboles a plantar debe ser 7 u 8. Ejercicio 13

Ejercicio 14. Sea t el número de semanas hasta la recogida y $G(t)$ la ganancia de esas t semanas.

$$\begin{array}{ll} t=1 & G(t=1)=(120+20\cdot 1)\cdot(2500-250\cdot 1) \\ t=2 & G(t=2)=(120+20\cdot 2)\cdot(2500-250\cdot 2) \end{array}$$

Para el caso general, la ganancia es

$$G(t)=(120+20\cdot t)\cdot(2500-250\cdot t)$$

derivando $G(t)$ respecto de t e igualando a cero, se obtiene

$$G'(t)=20000-10000\cdot t=0\Longrightarrow t=2$$

el máximo se alcanzará en $\boxed{t=2}$ y la ganancia corresponde a

$$G(2)=320000\ pts$$

Ejercicio 14